

**Université Montesquieu – Bordeaux IV**  
**1<sup>e</sup> année Sciences économiques**  
**Statistique descriptive**  
**TD-Concentration**

**Exercice I**

Le tableau statistique représente les tranches de revenu disponible des ménages constitués de deux communes A et B.

Tranche de revenu	nombre de ménages	
	Commune A	Commune B
[600;900[	20	40
[900;1100[	30	50
[1100;1300[	40	40
[1300;1600[	60	30
[1600;2000[	50	20
[2000;2500[	70	30
[2500;4000[	60	30
	<b>330</b>	<b>240</b>

**1. A première vue, quelle est la commune dont la concentration de revenu est la plus marquante ?**

Dans la commune A, 55 % des ménages (180 sur 330) ont un revenu supérieur à 1600 euros (les trois tranches les plus élevées). Dans la commune B, 33 % des ménages (80 sur 240) ont un revenu supérieur à 1 600 euros.

A l'inverse, dans la commune B, 55 % des ménages (130 sur 240) sont dans une des trois tranches de revenus les plus basses (revenus inférieurs à 1300 euros), contre 27 % (90 ménages sur 330) dans la commune A.

En termes d'inégalité, il est possible que la répartition des revenus soit plus inégale dans la commune A que dans la commune B puisqu'une plus grande part de ménages ont des revenus plus élevés.

Cette première impression est à vérifier par les indicateurs appropriés. Il s'agit alors de mesurer la concentration et l'indice de l'inégalité. *Notons que l'égalité de revenu signifie une très grande déconcentration de ce dernier, donc à l'inverse une grande concentration correspond à une inégalité élevée.*

**2. Calculez la moyenne des revenus et interprétez**

Voir le tableau,  $\bar{x} = \frac{\sum ni * Ci}{n}$

Pour la commune A :  $\bar{x} = 621000/330 = 1\ 881,8 \text{ €}$

Pour la commune B :  $\bar{x} = 370000/240 = 1\ 541,7 \text{ €}$

La moyenne des revenus de la commune A est plus élevée que celle de B car dans la première le nombre important en haut de l'échelle de la distribution tire le revenu vers le haut. Dans la deuxième, c'est l'inverse. Par conséquent, on peut dire que les ménages dans A sont en moyenne plus riches que dans B.

**3. Calculez la fréquence cumulée et la part cumulée de la masse des revenus et interprétez**

La fréquence cumulée (Fréq(cum) (pi)) se calcule à partir des fréquences (nombre de ménages/nombre total), elle ne prend pas en compte le revenu disponible dans le calcul tandis qu'il est intégré dans le calcul de la part cumulée de la masse des revenus (Fréq(cum)(qi)).

Commune A

Tranche de revenu	Population (A)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	qi=Fréq(cum)(qi)	N(cum)	pi=Fréq(cum) (pi)
[600;900[	20	0,061	750	15000	0	0,000	0	0,000
[900;1100[	30	0,091	950	28500	15000	0,024	20	0,061
[1100;1300[	40	0,121	1200	48000	43500	0,070	50	0,152
[1300;1600[	60	0,182	1450	87000	91500	0,147	90	0,273
[1600;2000[	50	0,152	1800	90000	178500	0,287	150	0,455
[2000;2500[	70	0,212	2250	157500	268500	<b>0,432</b>	200	0,606
[2500;4000[	60	0,182	3250	195000	426000	<b>0,686</b>	270	0,818
	330			621000	621000	1,000	330	1,000

Commune B

Tranche de revenu	Population (B)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	qi=Fréq(cum)(qi)	N(cum)	pi=Fréq(cum) (pi)
[600;900[	40	0,167	750	30000	0	0,000	0	0,000
[900;1100[	50	0,208	950	47500	30000	0,081	40	0,167
[1100;1300[	40	0,167	1200	48000	77500	0,209	90	0,375
[1300;1600[	30	0,125	1450	43500	125500	0,339	130	0,542
[1600;2000[	20	0,083	1800	36000	169000	0,457	160	0,667
[2000;2500[	30	0,125	2250	67500	205000	0,554	180	0,750
[2500;4000[	30	0,125	3250	97500	272500	0,736	210	0,875
	240			370000	370000	1,000	240	1,000

En regardant les revenus les plus bas, on constate que :

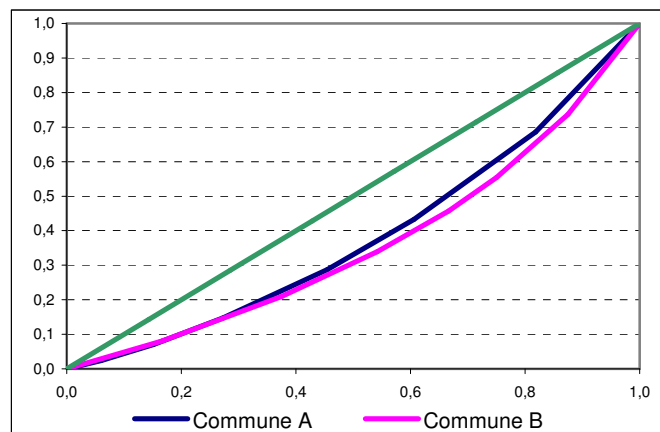
- dans la commune A, 6,1 % des ménages regroupent 2,4 % de l'ensemble des revenus ;
- dans la commune B, 16,7 % des ménages regroupent 8,1 % de l'ensemble des revenus.

En regardant les revenus les plus hauts, on constate que :

- dans la commune A, 18,2 % des ménages regroupent 31,4 % de l'ensemble des revenus ;
- dans la commune B, 12,5 % des ménages regroupent 26,4 % de l'ensemble des revenus.

4. Définissez et tracez deux courbes de concentration ou courbes de Lorenz. Que constatez-vous ?

La courbe de concentration met en relation la fréquence cumulée des effectifs et la fréquence cumulée des valeurs de la variable. Ici, il s'agit d'une relation entre la fréquence cumulée du nombre des ménages, notée pi, et la proportion cumulée de la somme des revenus, notée qi. Plus la courbe s'éloigne de la droite d'équi-répartition, plus la concentration est forte et donc l'inégalité est élevée.



On constate un léger éloignement de la courbe de concentration de la commune B à la droite d'équi-répartition. Cela confirme la concentration des revenus de cette dernière et contredit la première impression de la question 1.

Notons que la plupart du temps, la courbe est sous la droite d'égalité.

5. Calculez la médiane, la médiale, l'écart médiale-médiane, le ratio [(médiale-médiane)/étendue] et le rapport médiale-médiane. Commentez ces trois derniers indicateurs de concentration.

La médiane se calcule à l'aide de la fréquence cumulée.

La médiale se calcule à l'aide de la part cumulée des revenus.

Ces deux statistiques se calculent par la méthode d'interpolation linéaire.

**Médiane**

Pour A :  $ME = 1600 + [(0,5-0,455)/(0,606-0,455)] \times (2000-1600) = 1\,719,2 \text{ €}$

Tranche de revenu	Population (B)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	Fréq(cum)(qi)	N(cum)	Fréq(cum) (pi)
[1600;2000[	50	0,152	1800	90000	178500	0,287	150	<b>0,455</b>
[2000;2500[	70	0,212	2250	157500	268500	0,432	200	<b>0,606</b>

Pour B : ME = 1100 + [(0.5-0.375)/(0.542-0.375)]x(1300-1100) = 1 249,7 €

Tranche de revenu	Population (B)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	Fréq(cum)(qi)	N(cum)	Fréq(cum) (pi)
[1100;1300[	40	0,167	1200	48000	77500	0,209	90	<b>0,375</b>
[1300;1600[	30	0,125	1450	43500	125500	0,339	130	<b>0,542</b>

### Médiale

Pour A : MLE = 2000 + [(0.5-0.432)/(0.686-0.432)]x(2500-2000) = 2 133,9 €

Tranche de revenu	Population (A)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	Fréq(cum)(qi)	N(cum)	Fréq(cum) (pi)
[2000;2500[	70	0,212	2250	157500	268500	<b>0,432</b>	200	0,606
[2500;4000[	60	0,182	3250	195000	426000	<b>0,686</b>	270	0,818

Pour B : MLE = 1600 + [(0,5-0,457)/(0,554-0,457)]x(2000-1600) = 1 777,3 €

Tranche de revenu	Population (B)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	Fréq(cum)(qi)	N(cum)	Fréq(cum) (pi)
[1600;2000[	20	0,083	1800	36000	169000	<b>0,457</b>	160	0,667
[2000;2500[	30	0,125	2250	67500	205000	<b>0,554</b>	180	0,750

Etendue pour A et B = 4000-600 = 3400

	A	B
médiale-médiane	415	528
médiale/médiane	1,24	1,42
médiale-médiane/étendue	0,12	0,16

**Commentez.** La médiale ne peut être inférieure à la médiane. La médiale est d'autant supérieure à la médiane que la distribution est plus concentrée. Dans ce cas, les trois indicateurs de concentration confirment une répartition de revenus plus concentrées pour la commune B que pour la commune A.

### 6. Définissez et calculez l'indice de Gini.

L'indice de Gini est une mesure statistique très répandue pour quantifier l'inégalité des revenus. Plus l'indice est élevé, plus la concentration est grande. L'indice de Gini est compris entre 0 (absence d'inégalité) et 1 (inégalité extrême).

L'**indice de Gini** est défini comme 2 fois la surface comprise entre la droite d'équi-répartition et la courbe de concentration (notée A).

Gini = 2 x (surface A) or : surface A = 0,5 - (la somme des aire de trapèze)

➔ 0,5 = l'aire du triangle sous la courbe d'équi-répartition.

➔ L'aire d'un trapèze = base \* (somme des deux côtés) / 2.

$$\text{Donc } GINI = 2(0.5 - 1/2 \sum_{i=1}^j (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})) = 1 - \sum_{i=1}^j (p_i - p_{i-1})(q_i + q_{i-1})$$

Pour A : Gini = 1-0,768 = 0,232

Pour B : Gini = 1-0,728 = 0,272

C'est confirmé, l'indice de Gini des revenus pour la commune B est supérieur à celui de la commune A. La concentration des revenus est plus prononcée dans la commune B.

## Tableaux de calculs

### Commune A

Tranche de revenu	Population (A)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	qi=Fréq(cum)(qi)	N(cum)	pi=Fréq(cum) (pi)	qi+qi-1	pi-pi-1	(qi-qi-1)(pi+pi-1)
[600;900[	20	0,061	750	15000	0	0,000	0	0,000	0,00	0,00	0,00
[900;1100[	30	0,091	950	28500	15000	0,024	20	0,061	0,02	0,06	0,00
[1100;1300[	40	0,121	1200	48000	43500	0,070	50	0,152	0,09	0,09	0,01
[1300;1600[	60	0,182	1450	87000	91500	0,147	90	0,273	0,22	0,12	0,03
[1600;2000[	50	0,152	1800	90000	178500	0,287	150	0,455	0,43	0,18	0,08
[2000;2500[	70	0,212	2250	157500	268500	<b>0,432</b>	200	0,606	0,72	0,15	0,11
[2500;4000[	60	0,182	3250	195000	426000	<b>0,686</b>	270	0,818	1,12	0,21	0,24
	330			621000	621000	1,000	330	1,000	1,69	0,18	0,31

Somme : 0,768

Gini 0,232

### Commune B

Tranche de revenu	Population (B)	fi	Ci	niCi	nC(cum)	qi=Fréq(cum)(qi)	N(cum)	pi=Fréq(cum) (pi)	qi+qi-1	pi-pi-1	(qi-qi-1)(pi+pi-1)
[600;900[	40	0,167	750	30000	0	0,000	0	0,000	0,00	0,00	0,00
[900;1100[	50	0,208	950	47500	30000	0,081	40	0,167	0,08	0,17	0,01
[1100;1300[	40	0,167	1200	48000	77500	0,209	90	0,375	0,29	0,21	0,06
[1300;1600[	30	0,125	1450	43500	125500	0,339	130	0,542	0,55	0,17	0,09
[1600;2000[	20	0,083	1800	36000	169000	0,457	160	0,667	0,80	0,13	0,10
[2000;2500[	30	0,125	2250	67500	205000	0,554	180	0,750	1,01	0,08	0,08
[2500;4000[	30	0,125	3250	97500	272500	0,736	210	0,875	1,29	0,13	0,16
	240			370000	370000	1,000	240	1,000	1,74	0,13	0,22

Somme : 0,728

Gini 0,272